28-02-2018

$\alpha_n \to \ell$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n_0 < n \ |\alpha_n - \ell| < \varepsilon$

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει

$n \in \mathbb{N}$ $\lim \sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

$\lim \rho_n = 0$

$\alpha_n \geq 0$, $\alpha_n \nearrow$, $\alpha_n \leq M$ συγκλίνει στο Supremum

$\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Παρατήρηση: $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, $\alpha_k \geq 0 \Rightarrow S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k +$

$+ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \alpha_{k+1} = S_n + \alpha_{n+1} \geq S_n$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ αποκλίνει (δεν συγκλίνει)

Αν $(\exists M > 0)(S_n \leq M)(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = S_n \to \ell$

$\to (\forall M > 0) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(S_{n_0} > M)$

$\to (\forall n \geq n_0)$ $S_n \geq S_{n_0} > M$

Άρα $\lim_{n} S_n = +\infty$ άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$

Ορισμός: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απόλυτα αν $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $|a_k| = \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$

Πρόταση Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Αποδ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Αρκεί ν.δ.ο. $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ $(\forall n, m \geq m_0)$:

$\hookrightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon$.

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει $\to (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > m \geq n_0)$

Ισχύει $\left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$. Εφόσον $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \to$ η ζούμενο

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n} \leq \frac{1}{2^2} + \left[\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right]$

$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq M\right)$ Άρα η $S_{2n} \nearrow$ άνω φραγμένη

$\Rightarrow \exists \lim_n S_{2n} = \ell_1$

Θα δείξουμε ότι και $S_{2n+1} = \ell_1$

$S_{2n+1} = S_{2n} + \dfrac{1}{2n+1} \to \ell + 0 \Rightarrow \exists \lim S_n = \ell$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Θ.δ.ο. $S_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(S_{2^n} \to +\infty, S_n \to +\infty)$

$S_2 \geq 1 + \dfrac{1}{2}$, ισχύει.

Έστω ότι $S_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$

$S_{2^{n+1}} \geq 1 + \dfrac{n+1}{2}$, $S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$, $S_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$

$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \dfrac{1}{2^n+1} + \dfrac{1}{2^n+2} + \dots + \dfrac{1}{2^n+2^n}$

$S_{2^{n+1}} \geq \left(1 + \dfrac{n}{2}\right) + \dfrac{2^n}{2^n+2^n}$

$= \left(1 + \frac{n}{2}\right) + \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = 1 + \dfrac{n+1}{2} = b_n$

$(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim S_{2^n} = +\infty$

Έστω $M>0$ Θ.δ.ο. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(S_{2^n} > M)(\forall n \geq n_0)$

$b_n \to +\infty$, $\exists n_0 \, (b_n > M)(\forall n \geq n_0)$

Αλλά $S_{2^n} \geq b_n \, (\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{2^n} > M \, (\forall n \geq n_0)$

$\Rightarrow \lim S_{2^n} = +\infty$

Έστω $M>0$ Θ.δ.ο. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $S_n > M$ $(\forall n \geq n_0)$

$\lim S_{2^n} = +\infty \Rightarrow (\forall M>0)$ $S_{2^n} > M$ $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$

Διαλέγουμε $n_0 = 2^{n_1}$ έχουμε $(\forall n > n_0)$ $n_0 = 2^n \Rightarrow S_n \geq M$

Κριτήριο συμπύκνωσης Cauchy

Έστω (a_n) $a_{n+1} \leq a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

$a_n > 0$ με $a_n \to 0$

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$b_1 = 2a_2$

$b_2 = 4a_4$

$b_3 = 8a_8$

$b_n = 2^n a_{2^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n}$

$b_n = 2^n a_{2^n} = \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$